Miejsce na identyfikację szkoły

ARKUSZ PRÓBNEJ MATURY Z OPERONEM MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Czas pracy: 170 minut

LISTOPAD 2013

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1.–33.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. W zadaniach zamkniętych (1.–24.) zaznacz poprawną odpowiedź.
4. W rozwiązaniach zadań otwartych (25.–33.) przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
9. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**.

Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 24. wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (*1 pkt*)

Suma liczby odwrotnej do liczby $-4\frac{3}{5}$ i liczby przeciwnej do liczby $\frac{18}{23}$ jest równa:

A. -1 **B.** 0 **C.** $-\frac{21}{23}$ **D.** 1

Zadanie 2. (*1 pkt*)

Wartość wyrażenia $\frac{1}{2}\log_3 15 - \log_3 \sqrt{5}$ jest równa:

A. -1 **B.** $\log_3 3\sqrt{5}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Zadanie 3. (*1 pkt*)

Suma przedziałów $(-\infty, -11) \cup (7, +\infty)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

A. $|x+1| > 10$ **B.** $|x+2| > 9$ **C.** $|x-2| > 11$ **D.** $|x+1| < 10$

Zadanie 4. (*1 pkt*)

Niech $k = 2 - 3\sqrt{2}$, zaś $m = 1 - \sqrt{2}$. Wówczas wartość wyrażenia $k^2 - 12m$ jest równa:

A. $21 + 12\sqrt{2}$ **B.** $21 - 12\sqrt{2}$ **C.** 10 **D.** 34

Zadanie 5. (*1 pkt*)

Liczba a stanowi 40% liczby b. Wówczas:

A. $b = 0{,}4a$ **B.** $b = 0{,}6a$ **C.** $b = 2{,}5a$ **D.** $b = 0{,}25a$

Zadanie 6. (*1 pkt*)

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x+3}{x^3+4x}$ jest zbiór:

A. $R \setminus \{-4, 0\}$ **B.** $R \setminus \{0\}$ **C.** R **D.** $R \setminus \{-2, 0, 2\}$

Zadanie 7. (*1 pkt*)

Proste o równaniach $-3y - mx + 12 = 0$ oraz $y = 6x - 12$ są prostopadłe dla m równego:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** -18 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 6

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

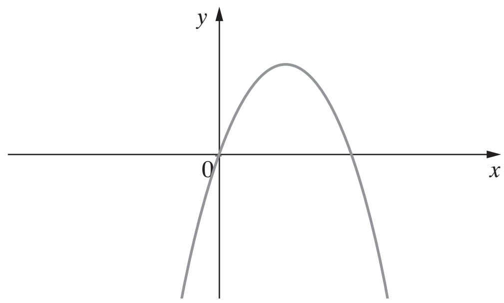
Zadanie 8. (*1 pkt*)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -2(x+3)(x-4)$ jest przedział:

A. $\left(-\infty, 24\frac{1}{2}\right\rangle$ **B.** $\left\langle -24\frac{1}{2}, +\infty\right)$ **C.** $\left\langle 24\frac{1}{2}, +\infty\right)$ **D.** $\left\langle -25\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Zadanie 9. (*1 pkt*)

Na wykresie przedstawiony jest trójmian $y = ax^2 + bx + c$.



Wynika z tego, że:

A. $b < 0$ **B.** $b > 0$ **C.** $b \leq 0$ **D.** $b \geq 0$

Zadanie 10. (*1 pkt*)

Wielomian $W(x)$ jest stopnia czwartego. Pierwiastkiem dwukrotnym tego wielomianu jest liczba -1. Po rozłożeniu na czynniki wielomian ten może być postaci:

A. $-2(x-1)^2(x^2+1)$ **B.** $(x+1)^2(x-4)$

C. $-(x+1)^2(x^2+3)$ **D.** $(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$

Zadanie 11. (*1 pkt*)

Liczba różnych rozwiązań równania $\frac{(x+3)(x^2-4)}{x^2+2x} = 0$ wynosi:

A. 5 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Zadanie 12. (*1 pkt*)

Dana jest funkcja $h(x) = \left(-\frac{1}{3}m + 2\right)x + \frac{3}{2}m - 1$. Funkcja ta dla argumentu 0 przyjmuje wartość 5. Wówczas:

A. $m = \quad 9$ **B.** $m = \quad 6$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 2$

Zadanie 13. (*1 pkt*)

Ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = (-1)^{2n+3}(n+1)$. Suma dwóch pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. -5 **B.** -1 **C.** 1 **D.** 5

BRUDNOPIS (***nie podlega ocenie***)

Zadanie 14. (*1 pkt*)

W ciągu arytmetycznym piąty wyraz jest równy 8, zaś siódmy wyraz tego ciągu jest równy 14. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy:

A. 21 **B.** 23 **C.** 24 **D.** 3

Zadanie 15. (*1 pkt*)

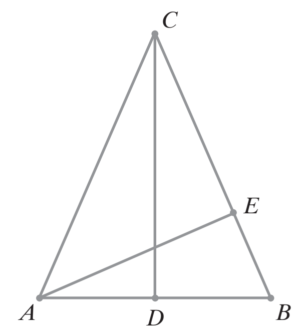
Pan Nowak wpłacił do banku k zł na procent składany. Oprocentowanie w tym banku wynosi 4% w skali roku, a odsetki kapitalizuje się co pół roku. Po 6 latach oszczędzania Pan Nowak zgromadzi na koncie kwotę:

A. $k(1+0{,}02)^{12}$ zł **B.** $k(1+0{,}04)^{12}$ zł

C. $k(1+0{,}02)^{6}$ zł **D.** $k(1+0{,}4)^{6}$ zł

Zadanie 16. (*1 pkt*)

W trójkącie równoramiennym ABC (rys.) o wysokościach CD i AE podstawa AB ma długość 8 cm, a odcinek BE ma długość 3 cm. Długość odcinka AC jest równa:

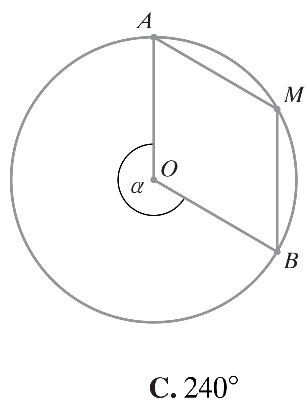


A. 6 cm **B.** $\frac{32}{3}$ cm

C. $\frac{28}{3}$ cm **D.** $\frac{33}{2}$ cm

Zadanie 17. (*1 pkt*)

W czworokącie $OBMA$ kąty wewnętrzne AOB i AMB mają równe miary (rys.).



Wówczas kąt α ma miarę:

A. 160° **B.** 120° **C.** 240° **D.** 210°

Zadanie 18. (*1 pkt*)

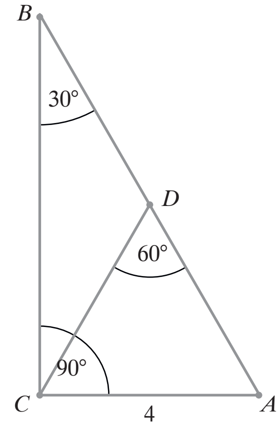
W trójkącie prostokątnym długość jednej z przyprostokątnych jest równa 7, zaś długość przeciwprostokątnej jest równa 8. Zatem tangens mniejszego kąta ostrego w tym trójkącie jest równy:

A. $\frac{15}{7}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{\sqrt{15}}{7}$ **D.** $\frac{7\sqrt{15}}{15}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 19. (*1 pkt*)

Długość odcinka BD w trójkącie prostokątnym ABC (rys.) jest równa:



A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

B. 4

C. $4\sqrt{3}$

D. $4\sqrt{2}$

Zadanie 20. (*1 pkt*)

Pole koła wpisanego w trójkąt równoboczny jest równe $\frac{16}{3}\pi$. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. $12\sqrt{3}$ **B.** 24 **C.** 12 **D.** 36

Zadanie 21. (*1 pkt*)

Długość okręgu opisanego równaniem $x^2-4x+y^2-4=0$ jest równa:

A. $4\sqrt{2}\pi$ **B.** 4π **C.** $2\sqrt{2}\pi$ **D.** $8\sqrt{2}\pi$

Zadanie 22. (*1 pkt*)

Punkty $A=(-2,4)$ i $C=(-6,2)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Zatem promień okręgu opisanego na tym kwadracie jest równy:

A. 10 **B.** 2 **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{10}$

Zadanie 23. (*1 pkt*)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,6,8,12,14,15\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że wybierzemy liczbę, której dzielnikiem jest liczba 3, wynosi:

A. $\frac{5}{9}$ **B.** $\frac{4}{9}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Zadanie 24. (*1 pkt*)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym objętość jest równa 32, zaś krawędź podstawy jest równa 4. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 2 **D.** 6

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 25. do 33. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 25. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność: $-2x^2 + 3x < 4$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Dany jest wielomian $W(x) = -2x^3 + 3x^2 - (k+2)x - 6$. Wyznacz wartość k, wiedząc, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Wykaż, że trapez, w którym przekątne dzielą kąty przy dłuższej podstawie na połowy, jest równoramienny.

Odpowiedź: ....

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Maszt telekomunikacyjny rzuca cień, który jest 2 razy krótszy niż wysokość masztu. Oblicz cosinus kąta, pod jakim padają promienie słoneczne.

Odpowiedź: ....

Zadanie 29. (*2 pkt*)

Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Odległość ich środków jest równa 8 cm. Gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie, to odległość ich środków byłaby równa 2 cm. Oblicz długości promieni tych okręgów.

Odpowiedź: ....

Zadanie 30. (*2 pkt*)

Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A=(-3,-2)$, $B=(1,-1)$, $C=(-1,4)$. Wyznacz równanie symetralnej boku AC tego trójkąta.

Odpowiedź: ....

Zadanie 31. (*4 pkt*)

Uczeń przygotowujący się do matury w ciągu pierwszego tygodnia rozwiązał 5 zadań. Postanowił jednak, że w każdym następnym tygodniu będzie rozwiązywał o 2 zadania więcej niż w poprzednim tygodniu. W którym tygodniu liczba zadań rozwiązanych przez niego od początku nauki przekroczy 480?

Odpowiedź: ....

Zadanie 32. (*5 pkt*)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość graniastosłupa jest o 4 krótsza od przekątnej podstawy i o 8 krótsza od przekątnej graniastosłupa. Oblicz sinus kąta pomiędzy przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy.

Odpowiedź: ....

Zadanie 33. (*5 pkt*)

Ojciec i syn zbierają w sadzie jabłka do skrzynek, które wkładają do samochodu dostawczego. Pracując jednocześnie, mogą załadować cały samochód w ciągu 6 godzin. Gdyby ojciec pracował sam, to załadowałby cały samochód w czasie o 5 godzin krótszym niż czas, w którym samodzielnie zrobiłby to syn. Oblicz, w jakim czasie ojciec załadowałby cały samochód, gdyby pracował sam.

Odpowiedź: ....

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom podstawowy

Listopad 2013

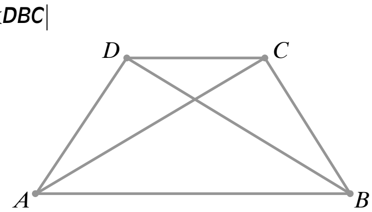
W niniejszym schemacie oceniania zadań otwartych są prezentowane przykładowe poprawne odpowiedzi. W tego typu zadaniach należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest zgodny z podanym schematem, oraz inne poprawne odpowiedzi w nim nieprzewidziane.

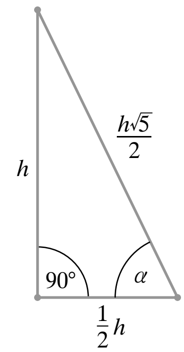
Zadania zamknięte

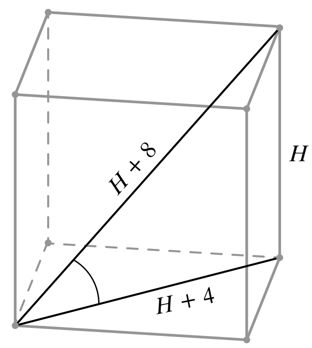
Nr zad.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
Odp.	A	C	B	C	C	B	A	A	B	C	D	C	A	B	A	B	C	C	B	B	A	C	B	D

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
25.	Postęp: obliczenie $\Delta = -23$ i stwierdzenie, że $\Delta < 0$ i $a < 0$ lub obliczenie $\Delta = -23$ i naszkicowanie wykresu	1 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: sformułowanie odpowiedzi, że rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych	**2 pkt**
26.	Postęp: podstawienie $x = -2$ i otrzymanie równania: $2(k+2)+22=0$	1 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: podanie rozwiązania równania: $k = -13$	**2 pkt**
27.	Postęp: skorzystanie z własności prostych równoległych przeciętych trzecią prostą oraz z warunków zadania (dwusieczne kątów ostrych): $\lvert\sphericalangle ACD\rvert = \lvert\sphericalangle CAB\rvert = \lvert\sphericalangle CAD\rvert$ $\lvert\sphericalangle BDC\rvert = \lvert\sphericalangle DBA\rvert = \lvert\sphericalangle DBC\rvert$  	1 pkt

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Rozwiązanie bezbłędne: wyciągnięcie wniosków, że trójkąty ADC i BCD są równoramienne i $\lvert AD\rvert = \lvert DC\rvert = \lvert BC\rvert$	**2 pkt**
28.	Postęp: wykonanie poprawnego rysunku i obliczenie długości przeciwprostokątnej $d = \frac{h\sqrt{5}}{2}$ 	1 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$	**2 pkt**
29.	Postęp: zapisanie warunków na styczność okręgów: $\begin{cases} r_1 + r_2 = 8 \\ r_1 - r_2 = 2 \end{cases}$	1 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie układu równań: $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 3$ cm	**2 pkt**
30.	Postęp: wyznaczenie współrzędnych środka boku AC, $S = (-2, 1)$ i współczynnika kierunkowego prostej AC, $a = 3$	1 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie równania symetralnej boku AC: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$	**2 pkt**
31.	Postęp: utworzenie modelu matematycznego: kolejne ilości zadań tworzą ciąg arytmetyczny, gdzie $a_1 = 5$, $r = 2$	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie wzoru na sumę ciągu arytmetycznego $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(5 + 5 + (n-1)\cdot 2)n}{2}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie nierówności $n^2 + 4n > 480$ i jej rozwiązanie	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: uwzględnienie, że n jest liczbą naturalną i zapisanie poprawnej odpowiedzi: Liczba rozwiązanych przez ucznia zadań przekroczy 480 w 21. tygodniu.	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
32.	Postęp: oznaczenie długości przekątnej podstawy: $H+4$, długości przekątnej graniastosłupa: $H+8$, gdzie H to długość wysokości graniastosłupa 	1 pkt
	Istotny postęp: zauważenie, że trójkąt utworzony przez krawędź boczną, przekątną podstawy i przekątną graniastosłupa jest trójkątem prostokątnym i zapisanie równania: $(H+4)^2+H^2=(H+8)^2$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: przekształcenie równania do postaci: $H^2-8H-48=0$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: rozwiązanie równania: $H=12$ (drugi pierwiastek odrzucamy)	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie wartości sinusa kąta pomiędzy przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy: $\frac{3}{5}$	**5 pkt**
33.	Postęp: utworzenie modelu matematycznego i wprowadzenie oznaczeń: V – pojemność samochodu x – czas, po którym ojciec sam załaduje samochód $x+5$ – czas, po którym syn sam załaduje samochód	1 pkt
	Istotny postęp: ułożenie równania: $\frac{V}{x}+\frac{V}{x+5}=\frac{V}{6}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: przekształcenie równania do postaci: $x^2-7x-30=0$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: rozwiązanie równania kwadratowego: $x=10$ lub $x=-3$ uwzględnienie warunku $x>0$ i wybranie właściwej odpowiedzi $x=10$	**5 pkt** (4 pkt, jeśli pojawią się błędy rachunkowe bądź nieuwzględniono warunku zadania)