Materiał ćwiczeniowy z matematyki

Poziom podstawowy

Styczeń 2011

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
Odpowiedź	**A**	**D**	**C**	**B**	**D**	**C**	**A**	**A**	**D**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**D**

MODEL OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 23. (*2 pkt*)

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w drugim rzucie wypadnie parzysta liczba oczek.

I sposób rozwiązania

Oznaczamy: A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu w drugim rzucie parzystej liczby oczek.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $|\Omega| = 36$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A: $|A| = 6 \cdot 3 = 18$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A: $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe $P(A) = \frac{1}{2}$.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu w drugim rzucie parzystej liczby oczek.
Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki doświadczenia i zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzaniu *A*.

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Zliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zdarzeń sprzyjających zdarzeniu *A*: $|\Omega| = 36$ i $|A| = 18$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego *A*: $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe $P(A) = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- poprawnie obliczy $|\Omega| = 36$ i $|A| = 18$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- poprawnie wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz poprawnie zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu polegającemu na wyrzuceniu w drugim rzucie parzystej liczby oczek i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poda prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A: $P(A) = \frac{1}{2}$.

Uwaga

1. Jeżeli zdający błędnie wyznaczy $|\Omega|$ (np. $|\Omega| = 6$) lub $|A|$ (np. $|A| = 3$), to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.
2. Jeżeli zdający wyznaczy $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu $|\Omega|$ lub $|A|$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **1 punkt**.

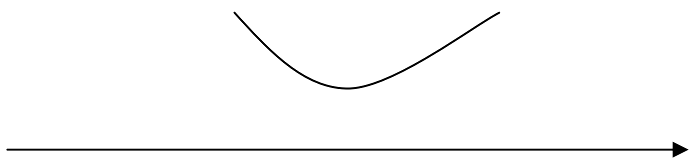
Zadanie 24. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $x^2 + x + 6 > 0$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2 + x + 6$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23$.

$\Delta < 0$, zatem trójmian kwadratowy $x^2 + x + 6$ nie ma pierwiastków. Szkicujemy wykres paraboli $y = x^2 + x + 6$ i odczytujemy rozwiązanie.



$x \in R$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta = -23$ i zauważy, że trójmian nie ma pierwiastków.

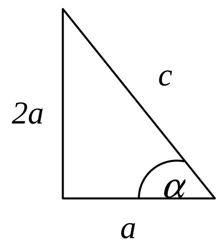
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poda rozwiązanie nierówności: $x \in R$ (lub inny równoważny zapis).

Uwaga
1. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który rozwiązuje nierówność inną niż w treści zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, to przyznajemy **1 punkt**.

Zadanie 25. (*2 pkt*)

Kąt α jest kątem ostrym. Wiedząc, że $tg\alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

I sposób rozwiązania



Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia:
a – długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α,
2a – długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α,
c – długość przeciwprostokątnej.

$$tg\alpha = \frac{2a}{a} = 2$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(2a)^2 + a^2 = c^2$$

$$4a^2 + a^2 = c^2$$

$$5a^2 = c^2$$

$$c = a\sqrt{5}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{2a}{c} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Stąd $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}$.

II sposób rozwiązania

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ (2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$ *i* $\cos\alpha > 0$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Stąd $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2} \\ \sin^2\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha = 1$

$\frac{5}{4}\sin^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$ *i* $\sin\alpha > 0$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Stąd $\cos\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Zatem $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}$.

III sposób rozwiązania

Dla $tg\alpha = 2$ odczytujemy z tablic trygonometrycznych: $\alpha \approx 63°$.

Stąd $\sin 63° \approx 0{,}891$ oraz $\cos 63° \approx 0{,}454$.

Zatem $\frac{\sin 63°}{\cos^2 63°} \approx \frac{0{,}891}{(0{,}454)^2} = \frac{0{,}891}{0{,}2062} \approx 4{,}321$.

Schemat oceniania I, II i III sposobu oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin\alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np. $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\cos\alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np. $\sin\alpha = 2\cos\alpha$, $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (lub ich wielokrotności) nawet z błędem rachunkowym oraz zapisze $\sin\alpha = \frac{2a}{c} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i na tym zakończy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym oraz zapisze $\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i na tym zakończy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta α: $\alpha \approx 63^\circ$ (akceptujemy wynik $\alpha \approx 64^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy:

- obliczy wartość $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} : \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}$

albo

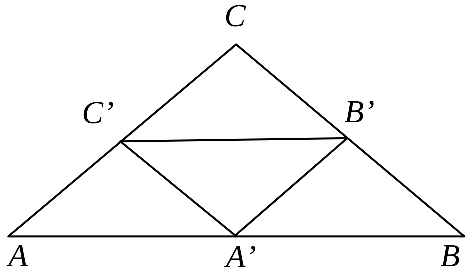
- obliczy przybliżoną wartość $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} : \frac{\sin 63^\circ}{\cos^2 63^\circ} \approx 4{,}321$.

Uwaga

1. Jeśli zdający przyjmie, że $\sin\alpha = 5$ i $\cos\alpha = 12$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający nie odrzuci odpowiedzi ujemnej, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Za rozwiązanie, w którym zdający błędnie zaznaczy kąt α na rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Punkty *A'*, *B'*, *C'* są środkami boków trójkąta *ABC*. Pole trójkąta *A'B'C'* jest równe 4. Oblicz pole trójkąta *ABC*.



Rozwiązanie

Trójkąty *ABC i A'B'C'* są podobne (cecha *kkk*). Ponieważ odcinek *C'B'* łączy środki boków *AC* i *BC*, to $|AB| = 2|C'B'|$. Zatem skala podobieństwa przekształcającego trójkąt *A'B'C'* na trójkąt *ABC* jest równa 2.
Obliczamy pole trójkąta *ABC*
$P_{ABC} = 4P_{A'B'C'} = 16$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zauważy podobieństwo trójkątów i wyznaczy skalę podobieństwa: 2.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie obliczy pole trójkąta *ABC*: $P_{ABC} = 16$.

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia: *2n*, *2n+2* – kolejne liczby parzyste

$(2n+2)^2-(2n)^2=4n^2+8n+4-4n^2=8n+4=4(2n+1)$

Zatem różnica $(2n+2)^2-(2n)^2=4(2n+1)$ jest liczbą podzielną przez 4.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy poprawnie zapisze różnicę kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych i poprawnie zastosuje wzór skróconego mnożenia: $(2n+2)^2-(2n)^2=4n^2+8n+4-4n^2$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wykaże, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4: $(2n+2)^2-(2n)^2=4(2n+1)$.

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Proste o równaniach $y=-9x-1$ i $y=a^2x+5$ są prostopadłe. Wyznacz liczbę *a*.

Rozwiązanie

Proste o równaniach $y=-9x-1$ i $y=a^2x+5$ są prostopadłe, zatem ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1\cdot a_2=-1$.

Ponieważ $a_1=-9$, $a_2=a^2$, to $a_1\cdot a_2=-9\cdot a^2$.

Stąd $-9\cdot a^2=-1$

$a^2=\frac{-1}{-9}$

$a^2=\frac{1}{9}$

Zatem $a=\frac{1}{3}$ lub $a=-\frac{1}{3}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy poprawnie zapisze warunek prostopadłości prostych: $-9\cdot a^2=-1$ lub $a^2=\frac{1}{9}$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy i poda <u>obie</u> wartości *a*: $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

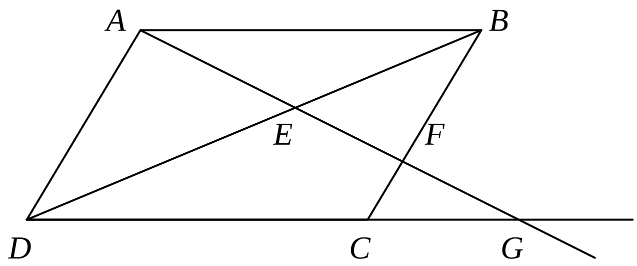
Zadanie 29. (*2 pkt*)

Prosta przechodząca przez wierzchołek *A* równoległoboku *ABCD* przecina jego przekątną *BD* w punkcie *E* i bok *BC* w punkcie *F*, a prostą *DC* w punkcie *G*.

Udowodnij, że $|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Rozwiązanie

Rysujemy równoległobok *ABCD* i wprowadzamy oznaczenia



Trójkąty *AEB* i *DEG* są podobne (cecha *kkk*), więc $\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EA|}{|EG|}$.

Trójkąty *BEF* i *ADE* również są podobne, więc $\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EF|}{|EA|}$.

Zatem $\frac{|EA|}{|EG|} = \frac{|EF|}{|EA|}$. Stąd $|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- zauważy podobieństwo trójkątów AEB i DEG i zapisze poprawny stosunek boków: $\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EA|}{|EG|}$

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów BEF i ADE i zapisze poprawny stosunek boków: $\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EF|}{|EA|}$

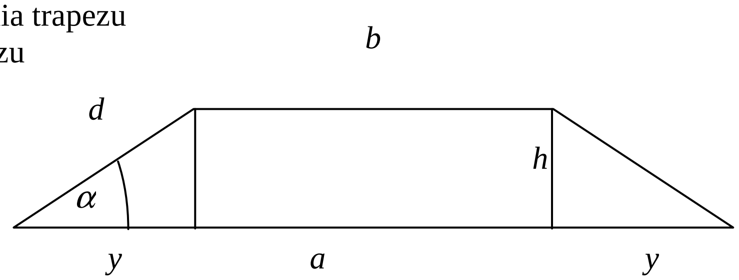
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zapisze, że $\frac{|EA|}{|EG|} = \frac{|EF|}{|EA|}$ i przekształci proporcję do postaci $|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Zadanie 30. (*4 pkt*)

W trapezie równoramiennym *ABCD* ramię ma długość 10. Obwód tego trapezu jest równy 40. Wiedząc, że tangens kąta ostrego w trapezie *ABCD* jest równy $\frac{3}{4}$, oblicz długości jego podstaw.

<u>Rozwiązanie</u>

Rysujemy trapez i wprowadzamy oznaczenia
a, b – długości podstaw trapezu
d – długość ramienia trapezu
h – wysokość trapezu



$tg\alpha = \frac{3}{4}$

$a = b + 2y$

Obwód trapezu jest równy $a + b + 2d = 40$. Stąd $a + b = 20$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość odcinka *y*.

$(h)^2 + (y)^2 = d^2$

$(3x)^2 + (4x)^2 = d^2$

$9x^2 + 16x^2 = 10^2$

$25x^2 = 100 \quad / : 25$

$x^2 = 4$

$x = 2$

Stąd $4x = 8$.

Zatem $a = b + 2 \cdot 4x = b + 16$.

$a + b = 20$

$b + 16 + b = 20$

$2b = 20 - 16$

Stąd $b = 2$ i $a = 18$.

Podstawy trapezu *ABCD* mają długości $a = 18$ i $b = 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie równania wynikającego z obwodu: $a+b=20$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie długości odcinka *y*: $y=8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Obliczenie długości jednej z podstaw trapezu: $a=18$ lub $b=2$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie długości obu podstaw trapezu: $a=18$ i $b=2$.

Uwaga

1. Jeżeli zdający przyjmie, że $h=3$ oraz $y=4$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie, to za całe rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **3 punkty**.

Zadanie 31. (*6 pkt*)

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Ich suma jest równa 15. Jeżeli pierwszą i trzecią liczbę pozostawimy bez zmian, a drugą pomniejszymy o jeden, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz wyrazy ciągu arytmetycznego.

I sposób rozwiązania

Ciąg (a_1, a_1+r, a_1+2r) – jest ciągiem arytmetycznym.

Z treści zadania wynika, że $a_1+a_1+r+a_1+2r=15$.

Stąd $3a_1+3r=15$.

$a_1+r=5$

Ciąg (a_1, a_1+r-1, a_1+2r) jest ciągiem geometrycznym Zatem $(a_1+r-1)^2=a_1(a_1+2r)$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} a_1+r=5 \\ (a_1+r-1)^2=a_1(a_1+2r) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1+r=5 \\ (5-1)^2=a_1(a_1+2r) \end{cases}$ $\begin{cases} r=5-a_1 \\ (5-1)^2=a_1(10-a_1) \end{cases}$ $\begin{cases} r=5-a_1 \\ 16=a_1(10-a_1) \end{cases}$ $\begin{cases} r=5-a_1 \\ a_1^2-10a_1+16=0 \end{cases}$

Rozwiązując równanie $a_1^2-10a_1+16=0$ otrzymujemy $a_1=2$ lub $a_1=8$.

Zatem $\begin{cases} a_1=2 \\ r=3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1=8 \\ r=-3 \end{cases}$.

Obliczamy wyrazy ciągu arytmetycznego: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 8 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 2 \end{cases}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Ciąg (a, b, c) – jest ciągiem arytmetycznym.

Z treści zadania i własności ciągu arytmetycznego wynika, że $a + b + c = 15$ i $b = \frac{a+c}{2}$.

Ciąg $(a, b-1, c)$ jest ciągiem geometrycznym. Zatem $(b-1)^2 = a \cdot c$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} a + b + c = 15 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases}$

$$\begin{cases} a + \frac{a+c}{2} + c = 15 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + 3c = 30 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 10 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 10 \\ b = \frac{10}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 10 - c \\ b = 5 \\ (5-1)^2 = (10-c) \cdot c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 10 - c \\ b = 5 \\ 16 = 10c - c^2 \end{cases}$$

Rozwiązując równanie $c^2 - 10c + 16 = 0$ otrzymujemy $c_1 = 2$ lub $c_2 = 8$.

Po podstawieniu otrzymujemy ciąg arytmetyczny $\begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 8 \end{cases}$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Wykorzystanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego do zapisania wyrazów ciągu: a_1, $a_1 + r$, $a_1 + 2r$ i zapisanie warunku $a_1 + r = 5$.

albo

- Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego oraz zapisanie: $b = \frac{a+c}{2}$ i $a + b + c = 15$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Zapisanie układu równań $(a_1 + r - 1)^2 = a_1(a_1 + 2r)$ i $a_1 + r = 5$.

albo

- Zapisanie układu równań $\begin{cases} a + b + c = 15 \\ b = \dfrac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt
Zapisanie i rozwiązanie równania z jedną niewiadomą:

- $a_1^2 - 10a_1 + 16 = 0$, $a_1 = 2$, $r = 3$ lub $a_1 = 8$, $r = -3$,

albo

- $c^2 - 10c + 16 = 0$,. $c_1 = 2$ lub $c_2 = 8$.

<u>Uwaga</u>
Jeśli zdający obliczy tylko jedną wartość, to otrzymuje **3 punkty**.

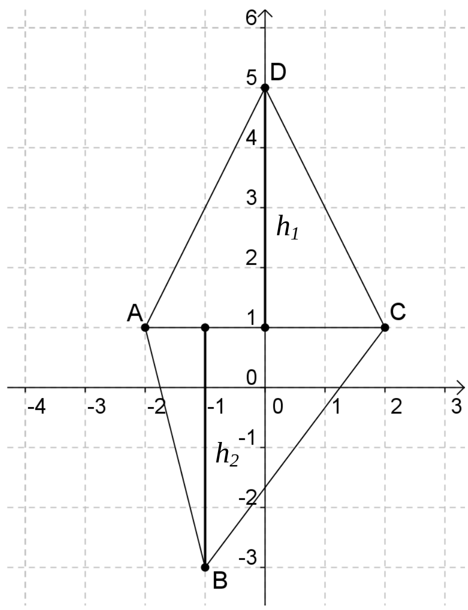
Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt
Obliczenie wszystkich wyrazów ciągu: 2, 5, 8 lub 8, 5, 2.

Zadanie 32. (*4 pkt*)

Oblicz pole czworokąta *ABCD*, którego wierzchołki mają współrzędne $A = (-2,1)$, $B = (-1,-3)$, $C = (2,1)$, $D = (0,5)$.

<u>I sposób rozwiązania</u>
Zaznaczamy punkty $A = (-2,1)$, $B = (-1,-3)$, $C = (2,1)$, $D = (0,5)$ w układzie współrzędnych i rysujemy czworokąt *ABCD*.



Przekątna *AC* dzieli czworokąt *ABCD* na dwa trójkąty: *ACD* i *ABC*. Wysokość w trójkącie *ACD* jest równa $h_1 = 4$ i jest jednocześnie odległością punktu *D* od prostej *AC* o równaniu $y = 1$. Zatem pole trójkąta *ACD* jest równe $P_1 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_1$.

Ponieważ $|AC| = 4$ i $h_1 = 4$, to $P_1 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

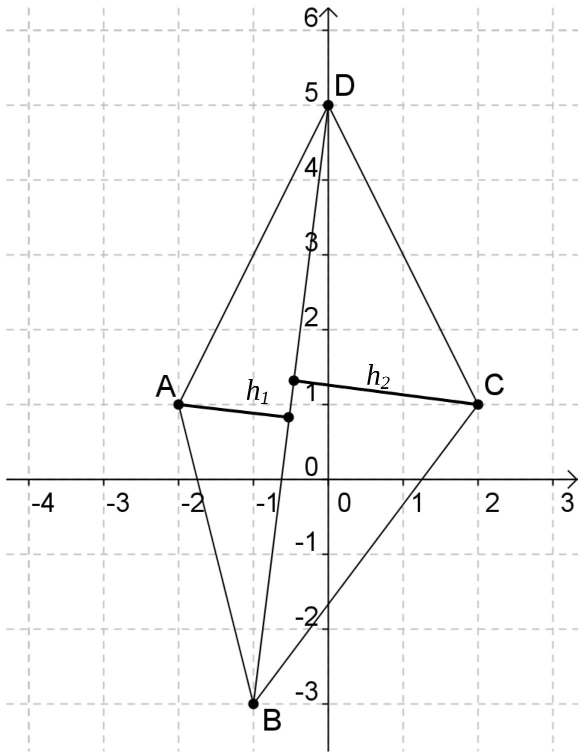
Wysokość w trójkącie *ABC* jest równa $h_2 = 4$ i jest jednocześnie odległością punktu *B* od prostej *AC* o równaniu $y = 1$. Zatem pole trójkąta *ABC* jest równe $P_2 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_2$.

Ponieważ $|AC| = 4$ i $h_2 = 4$, to $P_2 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Pole czworokąta *ABCD* jest równe sumie pól trójkątów *ACD* i *ABC*.
Zatem $P_{ABCD} = P_1 + P_2 = 8 + 8 = 16$.
Pole czworokąta *ABCD* jest równe 16.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Zaznaczamy punkty $A = (-2,1)$, $B = (-1,-3)$, $C = (2,1)$, $D = (0,5)$ w układzie współrzędnych i rysujemy czworokąt *ABCD*.



Przekątna *BD* dzieli czworokąt *ABCD* na dwa trójkąty: *ABD* i *BDC*. Wysokość h_1 w trójkącie *ABD* jest równa odległości punktu *A* od prostej *BD*, a wysokość h_2 w trójkącie *BDC* jest równa odległości punktu *C* od prostej *BD*. Zatem pole trójkąta *ABD* jest równe $P_1 = \frac{1}{2}|BD| \cdot h_1$, a pole trójkąta *BDC* jest równe $P_2 = \frac{1}{2}|BD| \cdot h_2$.

Wyznaczamy równanie prostej *BD*: $y+3=\frac{5+3}{0+1}(x+1)$

$$y+3=8(x+1)$$
$$y=8x+5$$

Postać ogólna równania prostej *BD*: $8x-y+5=0$.

Obliczamy długości wysokości h_1 i h_2, korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej.

$$h_1=\frac{|8\cdot(-2)-1\cdot 1+5|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{|-16-1+5|}{\sqrt{65}}=\frac{12}{\sqrt{65}}$$

$$h_2=\frac{|8\cdot 2-1\cdot 1+5|}{\sqrt{8^2+1^2}}=\frac{|16-1+5|}{\sqrt{65}}=\frac{20}{\sqrt{65}}$$

Obliczamy długość odcinka *BD:* $|BD|=\sqrt{(0+1)^2+(5+3)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$

Pole czworokąta *ABCD* jest równe sumie pól trójkątów *ABD* i *BDC*.

Ponieważ $|BD|=\sqrt{65}$ i $h_1=\frac{12}{\sqrt{65}}$, to $P_1=\frac{1}{2}|BD|\cdot h_1=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{65}\cdot\frac{12}{\sqrt{65}}=6$.

Ponieważ $|BD|=\sqrt{65}$ i $h_2=\frac{20}{\sqrt{65}}$, to $P_2=\frac{1}{2}|BD|\cdot h_2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{65}\cdot\frac{20}{\sqrt{65}}=10$.

Zatem $P_{ABCD}=P_1+P_2=6+10=16$.

Pole czworokąta *ABCD* jest równe 16.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Podział czworokąta na dwa trójkąty i wyznaczenie równania prostej *AC*: $y=1$ lub prostej *BD*: $y=8x+5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie odległości punktów *B* i *D* od prostej *AC*: 4

lub odległości punktów *A* i *C* od prostej *BD*: $\frac{12}{\sqrt{65}}$ i $\frac{20}{\sqrt{65}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Obliczenie pól trójkątów *ACD* i *ABC*: $P_1=P_2=8$ lub pól trójkątów *ABD* i *BDC*: $P_1=6$ i $P_2=10$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie pola powierzchni czworokąta *ABDC*: 16.