PRZYKŁADOWY ARKUSZ EGZAMINACYJNY   POZIOM PODSTAWOWY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zestaw P3

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Odpowiedź	A	B	B	C	C	D	C	B	B	C	B	A	D	D	C	D	A	C	A	A

Przykładowe rozwiązania zadań otwartych

Zadanie 21. (2 *pkt*)

Rozwiąż nierówność $3x^2 > 8x + 3$.

ROZWIĄZANIE:
Obliczam pierwiastki trójmianu kwadratowego:

$3x^2 - 8x - 3 > 0$

$\Delta = 100$

$\sqrt{\Delta} = 10$

$x_1 = \frac{8-10}{6} = -\frac{1}{3}$ lub $x_2 = \frac{8+10}{6} = 3$

Podaję rozwiązanie nierówności: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, \infty)$.

Zadanie 22. (2 *pkt*)

Rozwiąż równanie $2x^3 - 18x = 0$.

ROZWIĄZANIE:
Zapisuję równanie $2x^3 - 18x = 0$ w postaci $2x(x^2 - 9) = 0$, a następnie przekształcam je do postaci: $2x(x-3)(x+3) = 0$

Równanie ma trzy rozwiązania: $x = 0$, $x = 3$, $x = -3$.

Zadanie 23. (2 *pkt*)

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i przez środek okręgu o równaniu $x^2+y^2-2x+4y-5=0$.

ROZWIĄZANIE:

Zapisuję równanie $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ w postaci $(x-1)^2+(y+2)^2=10$.

Odczytuję środek okręgu: $S=(1,-2)$.

Równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych ma postać: $y=ax$. Prosta ma przechodzić również przez środek okręgu, czyli punkt $S=(1,-2)$.

Zatem równanie szukanej prostej ma postać: $y=-2x$.

Zadanie 24. (2 *pkt*)

Wyznacz wartość największą i najmniejszą funkcji kwadratowej $f(x)=2x^2-5x+3$ w przedziale $\langle -1,2\rangle$.

ROZWIĄZANIE:

Sprawdzam, czy pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle -1,2\rangle$:
$x_w=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{4}\in\langle -1,2\rangle$.

Obliczam wartość funkcji dla $x_w=\frac{5}{4}$: $f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{8}$.

Obliczam wartości funkcji na krańcach przedziału $\langle -1,2\rangle$: $f(-1)=10$, $f(2)=1$.

$f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{8}$ to najmniejsza wartość funkcji $f(x)=2x^2-5x+3$ w przedziale $\langle -1,2\rangle$,
$f(-1)=10$ to największa wartość funkcji $f(x)=2x^2-5x+3$ w przedziale $\langle -1,2\rangle$.

Zadanie 25. (2 *pkt*)

Wykaż, że jeśli k i n są liczbami naturalnymi oraz $1 \le k \le n$, to $k(n-k+1) \ge n$.

ROZWIĄZANIE:

Doprowadzam nierówność $k(n-k+1) \ge n$ do postaci nierówności kwadratowej z niewiadomą k:

$k(n-k+1) \ge n$

$kn-k^2+k-n \ge 0$

$-k^2+k(n+1)-n \ge 0$

Obliczam wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$\Delta = (n+1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-n)$

$\Delta = n^2+2n+1-4n$

$\Delta = n^2-2n+1 = (n-1)^2$

Dla każdego n $(n-1)^2 \ge 0$, stąd $\sqrt{\Delta} = n-1$.

$k_1 = \frac{-n-1-(n-1)}{-2} = n$ lub $k_2 = \frac{-n-1+n-1}{-2} = 1$

Wtedy nierówność ma postać:

$-(k-n)(k-1) \ge 0$

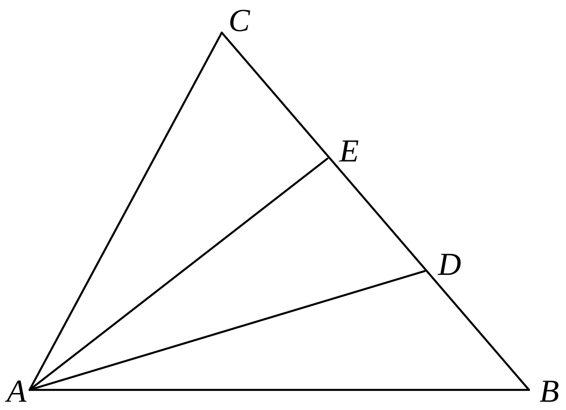
$(k-1)(n-k) \ge 0$

Dla każdego k i dla każdego n przy założeniu ($1 \le k \le n$), $k-1 \ge 0$ i $n-k \ge 0$.

Stąd dla każdego k i dla każdego n przy założeniu ($1 \le k \le n$), $(k-1)(n-k) \ge 0$.

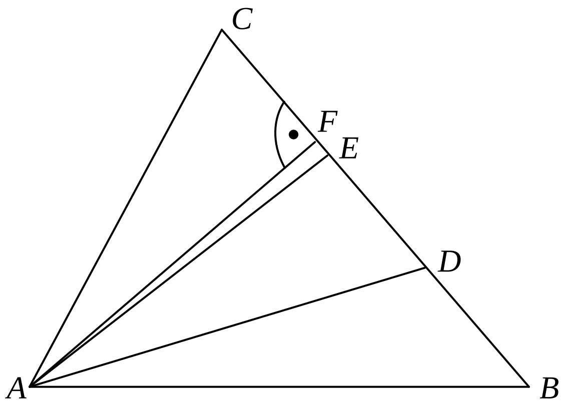
Zadanie 26. (2 *pkt*)

Punkty D i E dzielą bok BC trójkąta ABC na trzy równe części (zobacz rysunek). Wykaż, że pole trójkąta ADE jest trzy razy mniejsze od pola trójkąta ABC.



ROZWIĄZANIE:

Zaznaczam wysokość AF trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A



Otrzymuję: $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AF| = \frac{1}{2}\cdot 3|DE|\cdot|AF| = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot|DE|\cdot|AF| = 3P_{\Delta ADE}$

Zatem pole trójkąta ADE jest trzy razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Zadanie 27. (2 *pkt*)

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$.

ROZWIĄZANIE:

Przekształcam wyrażenie $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$:

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Obliczam wartość wyrażenia: $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{8}{17}} = \frac{17}{8}$.

Zadanie 28. (2 *pkt*)

Sprawdź, czy czworokąt *ABCD*, gdzie $A=(-3,-1)$, $B=(53,-2)$, $C=(54,4)$, $D=(-2,3)$ jest równoległobokiem. Odpowiedź uzasadnij.

ROZWIĄZANIE:
Obliczam długości odcinków *AB* i *DC* oraz odcinków *AD* i *BC*:

$$|AB| = \sqrt{(53+3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{56^2 + 1}$$

$$|DC| = \sqrt{(54+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{56^2 + 1}$$

$$|AD| = \sqrt{(-2+3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{17}$$

$$|BC| = \sqrt{(54-53)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{37}$$

Czworokąt *ABCD* nie jest równoległobokiem, ponieważ $|AD| \neq |BC|$.

Zadanie 29. (5 *pkt*)

Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+b+c=33$. Ciąg $(a, b+3, c+13)$ jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

ROZWIĄZANIE:

Wykorzystuję własności ciągu arytmetycznego i zapisuję: $b=a+r$ i $c=a+2r$.

Wykorzystuję własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego i zapisuję układ równań wynikający z warunków zadania:

$$\begin{cases} a+b+c=33 \\ (b+3)^2=a(c+13) \end{cases}$$

Podstawiam $b=a+r$ i $c=a+2r$.

$$\begin{cases} a+a+r+a+2r=33 \\ (a+r+3)^2=a(a+2r+13) \end{cases}$$

Z pierwszego równania otrzymuję: $a=11-r$.

Następnie przekształcam układ równań do równania z jedną niewiadomą r:
$(11-r)(24+r)=196$.

Po kolejnych przekształceniach otrzymuję równanie postaci: $r^2+13r-68=0$.

Rozwiązując równanie otrzymuję dwa rozwiązania: $r=-17$ lub $r=4$.

Zatem mamy dwie wartości liczby a: $a=28$ dla $r=-17$ lub $a=7$ dla $r=4$.

Stąd otrzymuję dwie trójki liczb, które spełniają warunki zadania: $\begin{cases} a=28 \\ b=11 \\ c=-6 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=7 \\ b=11 \\ c=15 \end{cases}$.

Zadanie 30. (4 *pkt*)

Punkty $A=(-9,-3)$ i $B=(5,5)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego *ABC*, w którym *AB* jest przeciwprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka *C* wiedząc, że leży on na osi *Ox*.

ROZWIĄZANIE:

Współrzędne punktu *C*, leżącego na osi *Ox* zapisuję w postaci: $C=(x,0)$.

Wyznaczam długość przyprostokątnych *AC* i *BC* oraz długość przeciwprostokątnej *AB* trójkąta *ABC*:

$|AC|=\sqrt{(x+9)^2+9}$

$|BC|=\sqrt{(x-5)^2+25}$

$|AB|=\sqrt{260}$

Stosuję twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *ABC*: $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ i zapisuję równanie z jedną niewiadomą: $(x+9)^2+9+(x-5)^2+25=260$.

Doprowadzam równanie $(x+9)^2+9+(x-5)^2+25=260$ do postaci $x^2+4x-60=0$.

Rozwiązuję równanie i otrzymuję $x_1=-10$ lub $x_2=6$.

Podaję współrzędne obu punktów *C*: $C=(-10, 0)$ lub $C=(6, 0)$.

Zadanie 31. (5 *pkt*)

Za wynajęcie autobusu na wycieczkę uczniowie klasy IA mieli zapłacić 1800 złotych. Ponieważ 4 uczniów zrezygnowało z tej wycieczki, każdy z pozostałych uczniów zapłacił o 15 zł więcej. Oblicz, ilu uczniów jest w klasie IA.

Wprowadzam oznaczenia:

x – planowana liczba uczniów,

y – jednostkowy koszt wynajęcia autokaru przy liczbie uczniów równej x.

Zapisuję zależność między liczbą uczniów i jednostkowym kosztem wynajęcia autokaru: $x \cdot y = 1800$.

Zapisuję układ równań z niewiadomymi x oraz y:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1800 \\ (x-4)(y+15) = 1800 \end{cases}$$

Przekształcam układ równań do równania z jedną niewiadomą:

$$(x-4)\cdot\left(\frac{1800}{x}+15\right) = 1800$$

Po przekształceniach powyższe równanie przyjmuje postać: $x^2 - 4x - 480 = 0$

Rozwiązuję równanie i otrzymuję dwa rozwiązania: $x = -20$ lub $x = 24$.

Odrzucam rozwiązanie $x = -20$, które nie spełnia warunków zadania.

Podaję odpowiedź: W klasie IA jest 24 uczniów.